



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Dimensionering af vridningspåvirkede betonkonstruktioner

Heshe, Gert

Publication date:
1989

Document Version
Tidlig version også kaldet pre-print

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):
Heshe, G. (1989). *Dimensionering af vridningspåvirkede betonkonstruktioner*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter. U/ Bind U8908

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

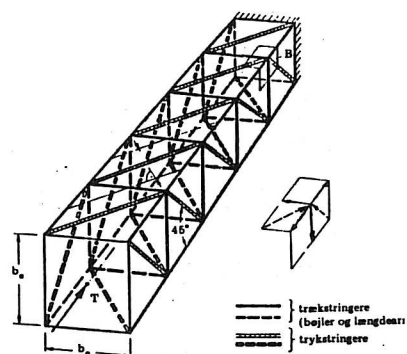
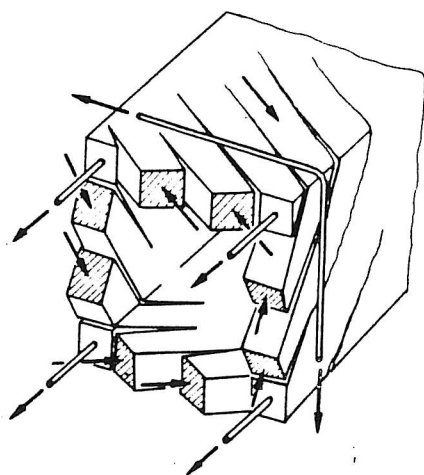
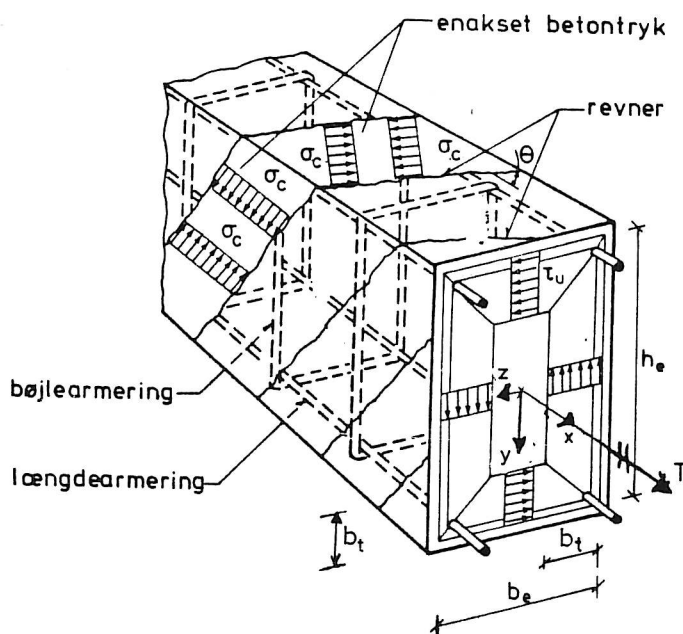
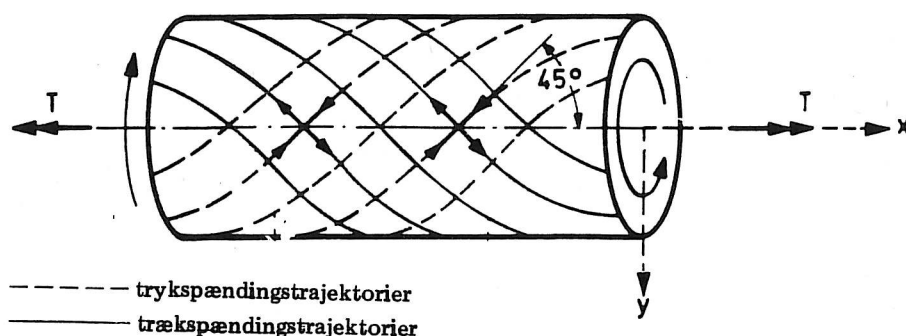
- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

INSTITUTE OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING
AALBORG UNIVERSITETSCENTER • AUC • AALBORG • DANMARK



GERT HESHE

DIMENSIONERING AF VRIDNINGSPÅVIRKEDE BETONKONSTRUKTIONER

SEPTEMBER 1989 (Revideret udgave)

ISSN 0902-8005 U8908

INDHOLDSFORTEGNELSE

0. INDLEDNING	1
1. UARMEREDE BETONKONSTRUKTIONER PÅVIRKET TIL REN VRIDNING	1
2. ARMEREDE BETONKONSTRUKTIONER PÅVIRKET TIL REN VRIDNING	6
2.1 Armeringens virkemåde	7
2.2 Vridningsbæreevnen for bjælker med rektangulært tværsnit, armeret med længdearmring og herpå vinkelrette bøjler ..	9
2.2.1 Normalarmeret bjælke	13
2.2.2 Overarmeret bjælke med hensyn til længdearmring (OAL)	16
2.2.3 Overarmeret bjælke med hensyn til bøjler (OAT)	16
2.2.4 Overarmeret bjælke med hensyn til længdearmring og bøjler (OA)	16
2.2.5 Vridningspåvirkede betonkonstruktioners behandling i DS 411, 3. udgave, marts 1984	17
3. KOMBINERET PÅVIRKNING BESTÅENDE AF NORMAL- OG FORSKYDNINGSKRAFT SAMT BØJNING- OG VRIDNING- MOMENT	22

SYMBOLER

A	areal af normalsnit der begrænses af den kurve, der forløber i langs det hule tyndfligede tværsnits begrænsende vægge
A_c	betonareal
A_{sl}	den samlede symmetrisk anbragte længdearmerings tværsnitsareal
A_{st}	bøjlestangens tværsnitsareal
I_T	vridningsinertimoment
M	bøjende moment
M_p	flydeværdi for M som eneste påvirkning
N	normalkraft
T	vridende moment
T_p	flydeværdi for T som eneste påvirkning
T_u	brudværdi for T
ΔT_n	delvridningsmoment virkende på det n -te deltværsnit
V	forskydningskraft
V_p	flydeværdi for V som eneste påvirkning
a_t	bøjleafstand
b	tværsnitsbredde. I afskrift af [6] er b lig bredden af det hule tyndfligede tværsnits vægtykkelse.
b_e	effektiv bredde målt fra yderside til yderside af bøjlerne
b_m	bredde målt fra midte væg til midte væg
b_t	vægtykkelse i det regningsmæssige tyndfligede tværsnit
d_m	højde målt fra midte væg til midte væg
d	tværsnitsdimension
d_{sl}	længdearmeringens diameter
d_{st}	bøjlearmeringens diameter
e_c	afstanden fra det transformerede tværsnits tyngdepunkt til ydersiden af bøjlen i bjælkens trykside
f_{cd}	betonens regningsmæssige trykbrudspænding
f_{td}	betonens regningsmæssige trækbrudspænding
f_{ck}	betonens karakteristiske trykbrudspænding
f_{tk}	betonens karakteristiske trækbrudspænding
$f_{yd,l}$	længdearmeringens regningsmæssige trækflydespænding

$f_{yk,l}$	længdearmeringens karakteristiske trækflydespænding
$f_{yd,t}$	bøjlearmeringens regningsmæssige trækflydespænding
$f_{yk,t}$	bøjlearmeringens karakteristiske trækflydespænding
h	tværsnitshøjde
h_e	effektiv højde, målt fra yderside til yderside af bøjlerne
h_{int}	tværsnittets indre momentarm
k	$= h_e/b_e$
n	antal, koordinatakse
t	koordinatakse
t_n	tyndfliget tværsnits vægtykkelse
u	omkredsen af arealet A
x	koordinatakse
y	—
z	—
α	faktor ved beregning af vridningsinertimoment, vinkel
β	faktor anvendt ved beregning af τ_{max}
γ	$= b_t/b_e$
γ_c	partialkoefficient for beton
γ_s	partialkoefficient for armering
θ	revnevinkel
ν	effektivitetsfaktor ved forskydningskraftspåvirkning
ν^*	effektivitetsfaktor ved vridningsmomentspåvirkning
ν^{**}	effektivitetsfaktor ved kombineret påvirkning
$\sigma_{c,T}$	trykspænding i den skrå betonlamel hidrørende fra vridningsmoment
$\sigma_{c,V}$	trykspænding i den skrå betonlamel hidrørende fra forskydningskraft
$\sigma_{c,M+N}$	trykspænding i den skrå betonlamel hidrørende fra påvirkning af bøjningsmoment og normalkraft.
σ_n	normalspænding \perp på n-aksen
σ_t	— \perp på t-aksen
σ_x	— \perp på x-aksen
σ_y	— \perp på y-aksen
τ	forskydningsspændinger

τ_T	vridningsforskydningsspænding
τ_u	forskydningsspænding ved brud
τ_{nt}	forskydningsspænding i en plan vinkelret på n-aksen
τ_{xy}	forskydningsspænding i en plan vinkelret på x-aksen
Φ_l	$= \frac{A_{sl} \cdot f_{yd,l}}{b_e \cdot h_e \cdot f_{cd}}$ mekanisk længdearmeringsgrad
Φ_t	$= \frac{2 \cdot A_{st} \cdot f_{yd,t}}{b_e \cdot a_t \cdot f_{cd}}$ mekanisk bøjlearmeringsgrad

FORKORTELSER

OA	bjælke overarmeret med hensyn til bøjler og længdearmering
OAT	bjælke overarmeret med hensyn til bøjler
OAL	bjælke overarmeret med hensyn til længdearmering

DIMENSIONERING AF VRIDNINGSPÅVIRKEDE BETONKONSTRUKTIONER.

0. INDLEDNING

Problemerne i forbindelse med spændingsbestemmelse i og dimensionering af vridningspåvirkede beton og jernbetonkonstruktioner er der ikke tidligere i undervisningen ofret meget tid på. Ja, man skal kun ca. 25 år — og jernbetonkonstruktioner har dog nu været anvendt i ca. 100 år — tilbage i tiden for at opleve, at den opmærksomhed, som emnet blev tildelt i undervisningen på Danmarks Tekniske Højskole, var til følgende bemærkning under en forelæsning: »Vridning i betonkonstruktioner bør undgås».

Dette skyldtes først og fremmest, at kendskabet til jernbetonkonstruktioners evne til at optage kombinationer af bøjnings-, forskydnings- og vridningspåvirkninger var yderst mangelfuld. Siden er der rådet bod på dette, idet der i de seneste år er udført et stort forskningsarbejde inden for dette felt. Selv om man stadig må erkende, at den »fulde sandhed» om, hvordan en jernbetonkonstruktion optager ovennævnte kombinationspåvirkning, endnu ikke er erkendt, så er man i dag i stand til at opstille beregnings modeller, der giver bæreevner, der stemmer godt overens med bæreevner fundet ved laboratorieforsøg.

Mangen en jernbetonkonstruktion er udført uden hensyntagen til den vridningspåvirkning, der er tilstede. Enhver kantbjælke i et ribbedæk vil f. eks. være vridningspåvirket på grund af pladens uundgåelige indspænding i bjælken. Denne påvirkning er imidlertid af sekundær karakter, og det forsvarlige i at se bort fra den skyldes de muligheder, som de plastiske deformationer giver for kraftomlejring. Beregningsmæssigt klares det ved at konstruere en statisk tilladelig og statisk sikker snitkraft- og/eller spændingsfordeling, idet dette i henhold til plasticitetsteoriens nedreværdisætning giver dimensioner, der er på den sikre side, vel at mærke, hvis forudsætningerne for at benytte nedreværdisætningen er til stede.

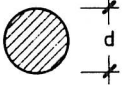

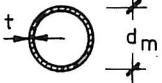
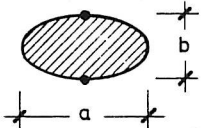
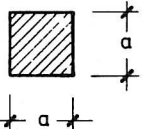
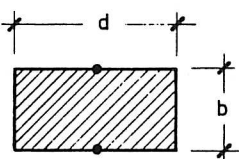
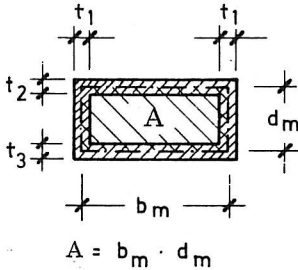


Drejer det sig derimod om f.eks. den bærende bjælke i en vindeltrappe eller en krum brodrager, er der ikke mulighed for en kraftomlejring. Disse bjælker skal kunne optage et vridningsmoment.

Nedenfor vil emnet blive behandlet i 3 afsnit nemlig

1. Uarmerede betonkonstruktioner påvirket til ren vridning
2. Armerede betonkonstruktioner påvirket til ren vridning
3. Armerede betonkonstruktioner påvirket af en kombination af vridning, bøjning og forskydning.

1. UARMERED E BETONKONSTRUKTIONER PÅVIRKET TIL REN VRIDNING

Påvirkes en konstruktion af et vridningsmoment vil spændingstilstanden i et snit \perp på momentvektoren være ren forskydning. Hovedspændingerne, der findes i snit under 45° med ovennævnte snit, vil derfor være henholds-

Tværsnit	$\max \tau = \frac{T}{W_T}$	I_T
	$\frac{16}{\pi} \frac{T}{d^3}$	$\frac{\pi d^4}{32}$
	$\frac{16}{\pi} \frac{d}{d^4 - d_i^4} T$	$\frac{\pi}{32} (d^4 - d_i^4)$
	$\sim \frac{2}{\pi} \frac{T}{t d_m^2}$	$\sim \frac{\pi t d_m^3}{4}$
	$\frac{16}{\pi} \frac{T}{a \cdot b^2}$	$\frac{\pi}{16} \frac{a^3 \cdot b^3}{a^2 + b^2}$
	$4,81 \frac{T}{a^3}$	$0,141 a^4$
	$\beta \frac{T}{b^2 d}$	$\alpha b^3 d$
	d / b	1,5 2,0 3,0 4,0 6,0 8,0 10,0 ∞
	α	0,196 0,229 0,263 0,281 0,299 0,307 0,313 0,333
 <p>$A = b_m \cdot d_m$</p>	Bredts formel vilkaarligt hult tværsnit $\frac{T}{2A \cdot \min t}$	$\frac{4 \cdot A^2}{\sum_i \frac{s_i}{t_i}}$
	rekt. hult tværsnit $\frac{T}{2b_m \cdot d_m \cdot \min t}$	$\frac{4 \cdot b_m \cdot d_m}{\frac{2}{b_m \cdot t_1} + \frac{1}{d_m \cdot t_2} + \frac{1}{d_m \cdot t_3}}$
	$\sim 5,32 \frac{T}{d^3}$	$0,133 d^4$
	$\sim 5,41 \frac{T}{d^3}$	$0,130 d^4$

Tabel 1.

vis træk- og trykspændinger af samme størrelse som den beregnede forskydningsspænding τ .

Da betonens trækstyrke er relativ lille, vil det her ved beregning af τ være rimeligt at anvende elasticitetsteorien, samt at betragte betonen som et homogent materiale.

Der skal ikke her kommes nærmere ind på hvordan τ beregnes. I tabel 1, som er taget fra [1], er for en række tværsnit påvirket til ren vridning, angivet formler til beregning af den max. forskydningsspænding τ_{\max} og vridningsinertimomentet I_T .

Fordelingen af disse vridningsforskydningsspændinger anskueliggøres bedst ved den såkaldte sæbehindeanalogi fremsat af L. Prandtl. (se f.eks. [2])

Ved åbne tværsnit sammensat af relativt lange rektangulære deltværsnit som for eksempel I- og T-tværsnit fordeles det samlede moment på de enkelte deltværsnit i forhold til deltværsnittenes vridningsinertimomenter.

I de nedenfor viste 2 eksempler er deltværsnit 1, 2 og 3 henholdsvis rektanglerne $b_1 \times t_1$, $b_2 \times t_2$ og $b_3 \times t_3$.

Idet n refererer til deltværsnitsnummeret, T_u til vridningsbæreevnen, T til det samlede vridende moment, ΔT_n til delmomentet virkende på det enkelte deltværsnit og $\tau_{\max, n}$ til den maksimale forskydningsspænding i det n -te del-element, $\tau_{\max, n}$ findes på delelementets længste side, fås følgende

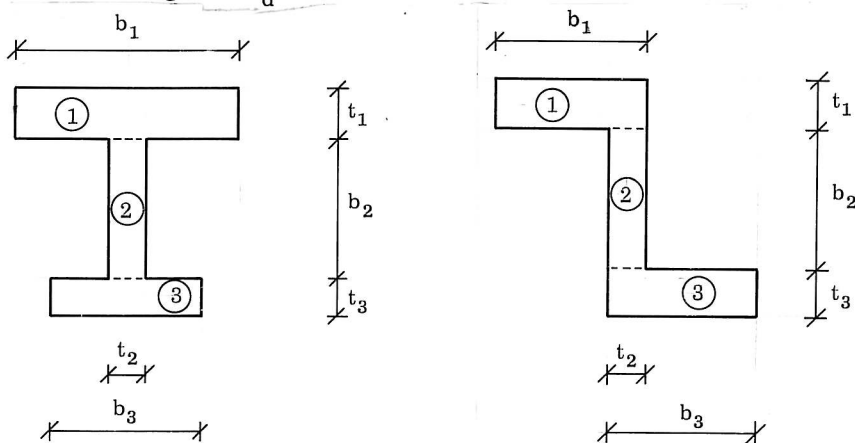
$$T_u = \min\left(\tau_d \frac{1}{\beta_n} \cdot t_n^2 \cdot b_n \frac{\sum I_{T, n}}{I_{T, n}}\right) \quad (1.1)$$

$$\Delta T_n = \frac{I_{T, n}}{\sum I_{T, n}} \cdot T \quad (1.2)$$

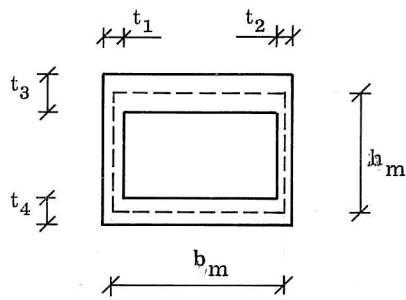
$$\tau_{\max, n} = \frac{\beta_n \cdot \Delta T_n}{t_n^2 \cdot b_n} \quad (1.3)$$

hvor $I_{T, n}$ og β_n kan findes af tabel 1.

(1.1) sikrer, at den maksimale forskydningsspænding i det sammensatte tværsnit er lig med τ_d .



Figur 1.1



Figur 1.2

For hule lukkede tværsnit kan Bredt's formel anvendes til beregning af den maksimalt optrædende forskydningsspænding

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_{\min}} \quad (\text{rektangulært tværsnit}) \quad (1.3)$$

eller generelt

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2 \cdot A \cdot t_{\min}}$$

hvor A betegner arealet af det normalsnit, der begrænses af den kurve, der forløber langs midtlinien i det hule tværsnits begrænsende vægge.

Ved dimensionering af en uarmeret bjælke påvirket til vridning, må tværsnittet vælges således, at den beregnede forskydningsspænding bliver mindre end eller lig med den regningsmæssige værdi af trækstyrken f_{td} , idet som tidligere nævnt, hovedtrækspændingen ved ren vridning er lig forskydningsspændingen.

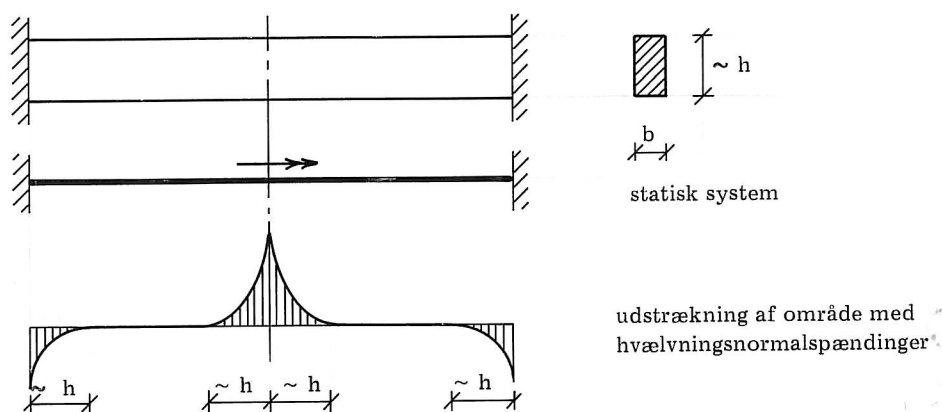
Vridningspåvirkning optræder ofte sammen med andre påvirkninger (bøjnings- og forskydningspåvirkning). I det urevnede stadium, hvor betonmaterialet regnes homogent og elastisk, kan de resulterende spændinger beregnes ved hjælp af superpositionsloven, og kravet må her som ovenfor være, at hovedtrækspændingen skal være mindre end trækstyrken f_{td} . I praksis vil det dog være yderst sjældent, at en bjælke påvirket til vridning, bøjning og/eller forskydning vil være uarmeret.

Forsøg viser, at bruddet i en vridningspåvirket uarmeret betonbjælke indledes med en revne under 45° med bjælkeaksen i en af tværsnittets lange sider. Bruddet er et udpræget skørt brud, der forløber så hurtigt, at man ikke med det blotte øje kan følge bruddets udvikling.

Denne brudform er man som ingeniør meget betænkelig ved, hvorfor der her skal manes til stor forsigtighed med hensyn til anvendelse og udformning af uarmerede jernbetonkonstruktioner, hvor påvirkningerne er af en sådan art, at der kan opstå trækspændinger.

Når en bjælkekonstruktion påvirkes af et vridningsmoment vil det for de fleste tværsnitsformer gælde, at tværsnittet ikke forbliver plant efter deformationen. Tværsnittet vil hvælve sig. Hvis denne hvælning frit kan forekomme, vil der kun optræde vridningsforskydningsspændinger i tværsnittet.

Hvis tværsnitshvælningen forhindres, hvilket f.eks. i bjælken i figur 1.3 sker i det punkt, hvor det vridende moment angriber, samt ved indspændingerne, hvis disse er tilpas massive, opstår der her desuden træk- og trykspændinger i tværsnittet. Størrelsen af disse spændinger kan i det urevnede stadium beregnes efter elasticitetsteorien.



Figur 1.3 Forløb af hvælvningsnormalspændinger for en bjælke med rektangulært tværsnit.

Drejer det sig om en jernbetonkonstruktion i det revnede stadium, bliver spændingsforholdene på grund af hvælvningen så kompliceret, at der endnu ikke findes en brugbar model til beregning af disse tillægsspændinger. Takket være de spændingsomlejringer, der kan finde sted på grund af betonkonstruktionens plastiske deformationsformåen, spiller disse tillægsspændinger med henblik på bæreevnen en mindre rolle, men de kan have betydning for revnedannelsen i konstruktionen. Af denne grund vil det derfor være fornuftigt i de områder, hvor ekstraspændingerne kan opstå, at indlægge ekstra armering for at formindske revnedannelsen.

De omtalte områder har en relativ ringe udstrækning. I henhold til St. Vernant's princip vil normalspændingerne på grund af tværsnitshvælvningen være klinget af i en afstand fra det sted, hvor spændingerne er størst, svarende til den største tværsnitsdimension. Se figur 1.3.

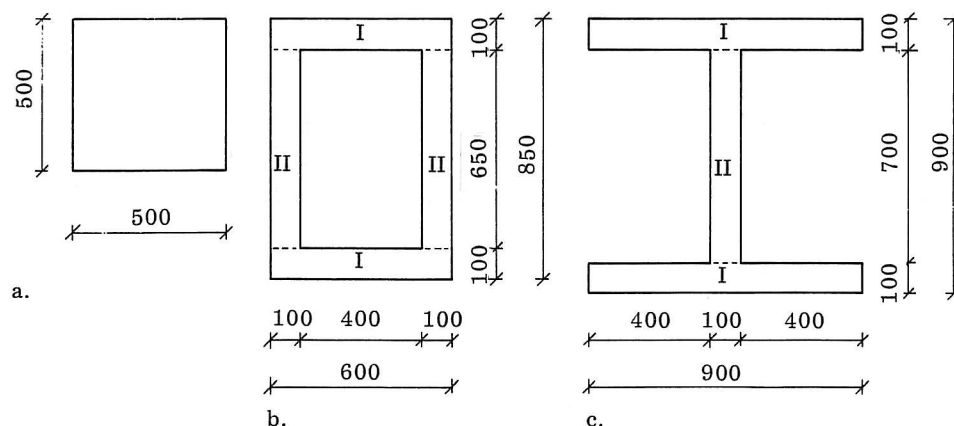
EKSEMPEL 1.1

De i figur 1.4 viste uarmerede betontværsnit regnes påvirket af vridningsmomentet $T = 4,53 \text{ kNm}$.

Tværsnittene har samme tværsnitsareal $A = 25 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$.

Tværsnittet antages urevnet. Nedenfor er der gennemført en beregning af de i tværsnittene forekommende maksimale vridningsforskydningsspændinger.

Ved beregning af vridningsinertimomentet og maksimale forskydningsspændinger er tabel 1 anvendt.



Figur 1.4

kvadratisk, massivt tværsnit (figur 1.4 a)

$$A_c = 500 \cdot 500 = 25 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$I_T = 0,141 \cdot 500^4 = 8,81 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\max \tau_T = 4,81 \frac{4,53 \cdot 10^6}{500^3} = 0,174 \text{ N/mm}^2$$

kasseformet tværsnit (figur 1.4 b)

$$A_c = 600 \cdot 100 \cdot 2 + 650 \cdot 100 \cdot 2 = 25 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$\max \tau_T = \frac{4,53 \cdot 10^6}{2 \cdot 750 \cdot 500 \cdot 100} = 0,060 \text{ N/mm}^2$$

I-formet tværsnit (figur 1.4 c)

$$A_c = 900 \cdot 100 \cdot 2 + 700 \cdot 100 = 25 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$2 \cdot I_{TI} = 2 \cdot 0,310 \cdot 100^3 \cdot 900 = 5,58 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{TII} = 0,303 \cdot 100^3 \cdot 700 = 2,12 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\sum I_T = 7,70 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\Delta T_I = \frac{0,5 \cdot 5,58 \cdot 10^8}{7,7 \cdot 10^8} \cdot T = 0,36 T$$

$$\Delta T_{II} = \frac{2,12 \cdot 10^8}{7,7 \cdot 10^8} \cdot T = 0,28 T$$

$$\max \tau_I = \frac{3,23 \cdot 0,36 \cdot 4,53 \cdot 10^6}{100^2 \cdot 900} = 0,59 \text{ N/mm}^2$$

$$\max \tau_{II} = \frac{3,31 \cdot 0,28 \cdot 4,53 \cdot 10^6}{100^2 \cdot 700} = 0,60 \text{ N/mm}^2$$

Heraf ses, at I-tværsnittet, er langt dårligere til at optage et vridningsmoment end de to øvrige tværsnit, samt at det kasseformede tværsnit er det bedst egnede til optagelse af vridningsmomenter.

2. ARMEREDE BETONKONSTRUKTIONER PÅVIRKET TIL REN VRIDNING

Hvis en armeret betonkonstruktion påvirkes af et vridende moment T , der langsomt vokser fra nul mod brudværdien, vil spændingstilstanden i begyndelsen, tilnærmet kunne beregnes som foran beskrevet, idet spændingerne i armeringen før betonen revner vil være meget små.

I det følgende vil kun vridning uden hvælvningsforhindring blive behandlet.

Tværsnittet vil da kun være påvirket af forskydningsspændinger, og hovedspændingerne vil i bjælkens sideflader danne en vinkel på ca. 45° med bjælkens længderetning.

Når forskydningsspændingernes størrelse bliver større end betonens trækstyrke, vil der opstå revner vinkelret på træk hovedspændingens retning. Da armeringens størrelse og arrangement har indflydelse på revnevidde og retning, vil revnerne normalt ikke forløbe under 45° med bjælkens længderetning i en armeret bjælke, men afvige noget derfra. Efter at bjælken er revnet, vil spændingstilstanden være yderst kompliceret, og man har da heller ikke endnu kunnet angive en teoretisk korrekt metode til beregning af disse spændinger.

Som så ofte før, når det for betonkonstruktioner har været umuligt at opstille en teoretisk korrekt beregningsmodel, kan man også i dette tilfælde ty til anvendelse af plasticitetsteoretiske beregningsmetoder.

Da beton, og for så vidt også armeringsstål, ikke er et idealplastisk materiale, kan en plasticitetsteoretisk løsning ikke anvendes direkte. Men laboratorieforsøg har vist, at hvis betonstyrken reduceres ved multiplikation med en »effektivitetsfaktor» ν^* , så stemmer brudværdien for vridningsmomentet, fundet ved en plasticitetsteoretisk løsning, særdeles godt overens med brudværdien fundet ved forsøg.

Det kan vises, at effektivitetsfaktoren ν^* bl.a. er afhængig af betonens tøjning i brudøjeblikket, men da det med den komplicerede spændingstilstand, der er tilstede, efter at betonen er revnet, i de fleste tilfælde ikke er muligt at beregne denne tøjning, vil det kun i undtagelsestilfælde være muligt at bestemme ν^* analytisk. ν^* må derfor bestemmes eksperimentelt, hvilket bevirker, at de nedenfor behandlede plasticitetsteoretiske løsninger kun kan benyttes for tværsnit, der er sammenlignelige med tværsnittene i de bjælker, der er anvendt ved den eksperimentelle bestemmelse af ν^* (rektangulære tværsnit). De udførte laboratorieforsøg har vist, at effektivitetsfaktoren ν^* er forskellig for de tre rene lasttilfælde: bøjning, forskydning og vridning.

I DS 411 er der ikke angivet begrænsninger for tværsnittets udformning. Man har til gengæld sat værdien af ν^* passende lav.

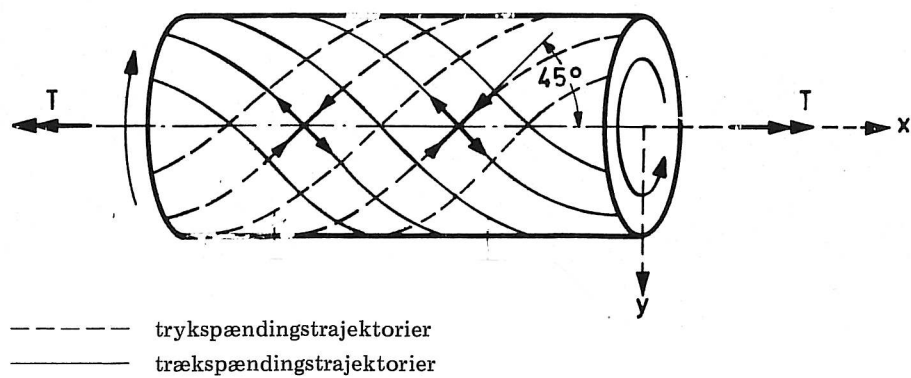
2.1 ARMERINGENS VIRKEMÅDE

For at illustrere armeringens virkemåde betragtes først en massiv cylinder påvirket af et vridende moment. Forskydningsspændingernes størrelse i et normalsnit vil her være proportional med afstanden fra tværsnittets centrum. De største forskydningsspændinger optræder derfor ved cylinderens overflade, og hovedsnittene i et punkt på overfladen vil danne en vinkel på 45° med frembringerretningen samt skære hinanden i et punkt, der falder sammen med radien gennem punktet.

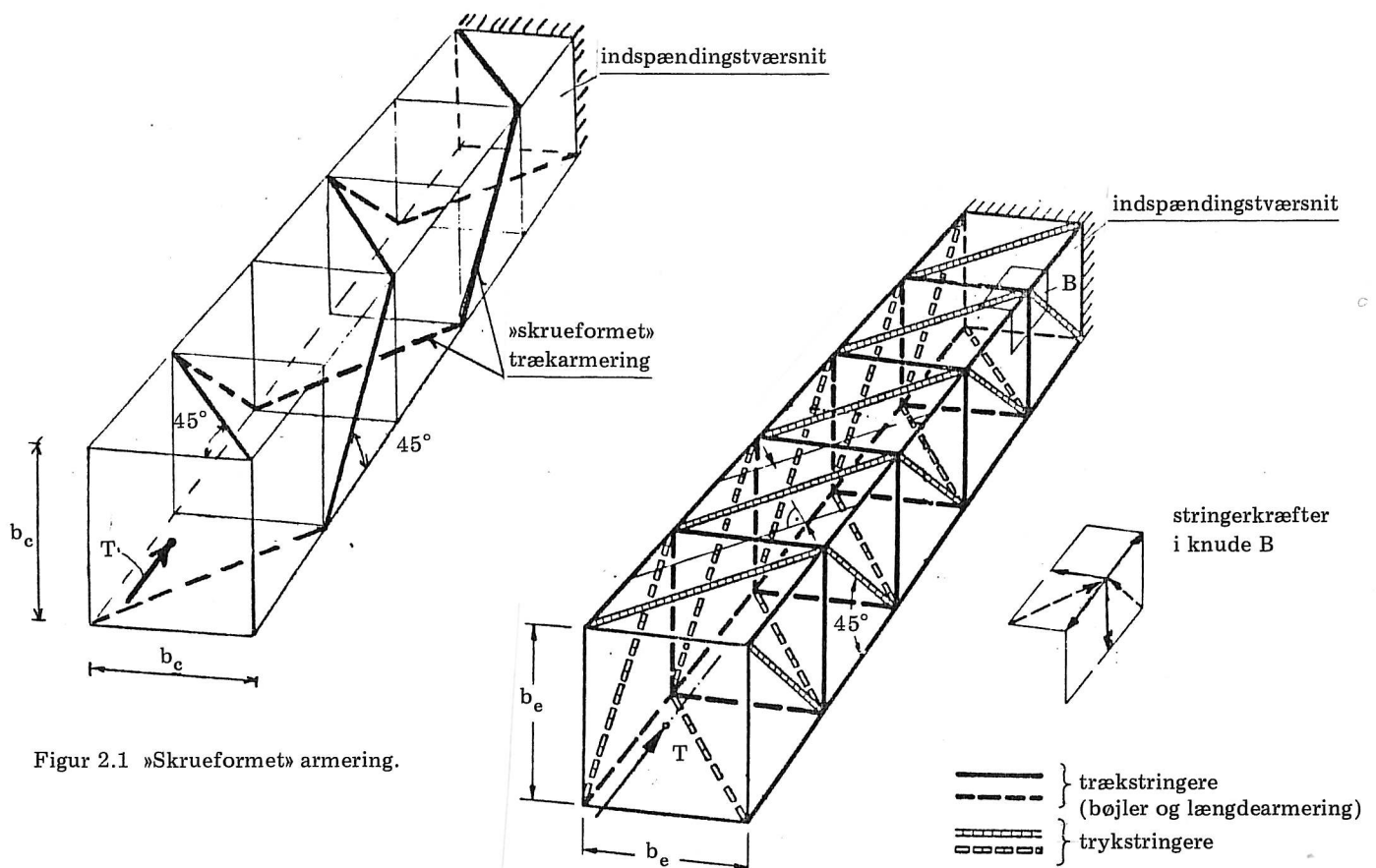
De første revner vil derfor danne en skruelinie på cylinderens overflade under 45° med frembringerne. Se figur 2.0.

Armeringen udnyttes bedst, når den står vinkelret på revnerne. Den bedste armering i ovennævnte tilfælde vil derfor være skrueformede armeringsstænger nær overfladen under 45° med frembringerne.

For bjælker med rektangulært tværsnit vil det i praksis være for besværligt at udforme armeringen på ovennævnte måde. Normalt anvendes ved rektangulære tværsnit en kombination af længdearmering og bøjler vinkelret på længdearmeringen til optagelse af trækkræfterne.



Figur 2.0 Hovedspændingstrajektorier ved ren vridningspåvirkning af en cylinderformet bjælke. Fra [1].



Figur 2.1 »Skrueformet« armering.

Figur 2.2 Gitteranalogi, med træk- og trykstringer. Fra [1].

I figur 2.1 er vist, hvordan en »skrueformet« armering kunne anordnes i en bjælke med kvadratisk tværsnit.

I figur 2.2 er ved en gitteranalogi antydnet spændingsforløbet i den beregningsmodel, der ligger til grund for den nedenfor angivne plasticitetsteoretiske løsning af vridningsproblemet.

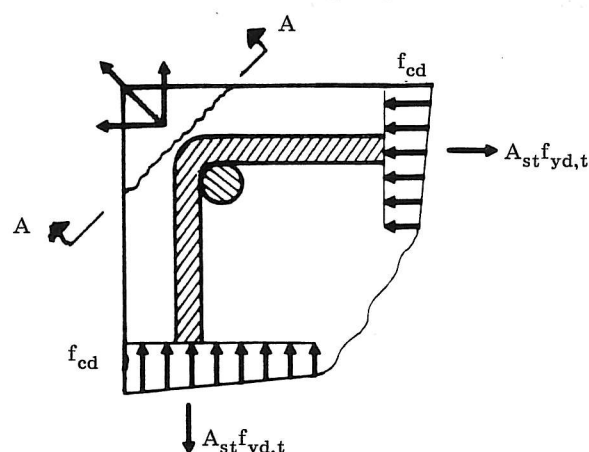
2.2 VRIDNINGSBÆREEVNE FOR BJÆLKER MED REKTANGULÆRT TVÆRSNIT, ARMERET MED LÆNGDEJERN OG HERPÅ VINKELRETTE BØJLER

Forsøg har vist, at det indre af et tværsnit praktisk taget intet bidrag giver til vridningsbæreevnen. Der vil derfor i det følgende blive regnet med et effektivt tværsnit svarende til et tyndfliget lukket tværsnit. Den ydre begrænsning for dette tværsnit regnes til ydersiden af bøjlerne, hvilket skyldes afskalningsfaren i bjælketværsnittets hjørner.

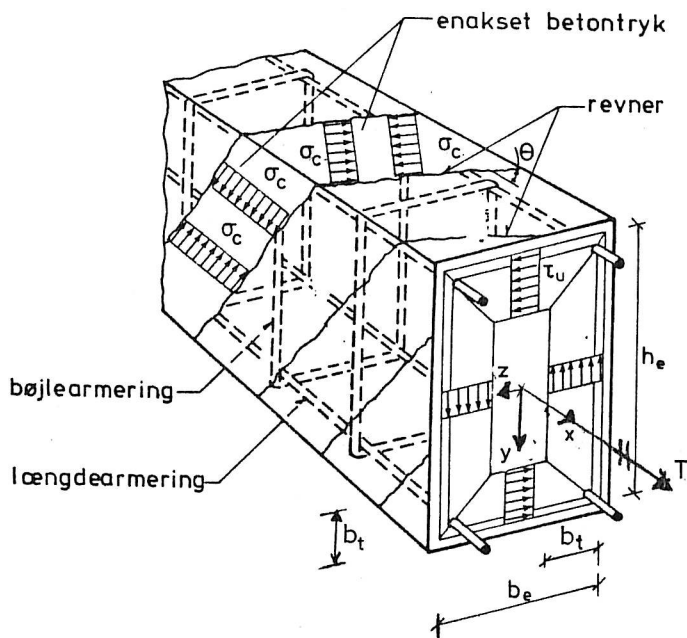
I figur 2.3 er de kvalitative forhold vedrørende spændingsfordelingen ved tværsnittets hjørne vist. I hjørnet udenfor bøjlen vil der på den viste trekant komme en udadrettet kraft. Hjørnet vil kun kunne holdes på plads af trækspændingerne i snit A - A. Da betonens trækstyrke er relativ lille, vil der ved fuld udnyttelse her ske en afskalning af hjørnet, hvorfor det anbefales kun at regne med tværsnittet inden for bøjlernes ydre begrænsning.

En simpel beregningsmodel vil være den, at vridningsmomentet optages ved hjælp af trækstringere, som er længde- og bøjlearmeringen, og trykstringere, som er »skrueformede« skråtstillede betonlameller, som vist i figur 2.4 og 2.5.

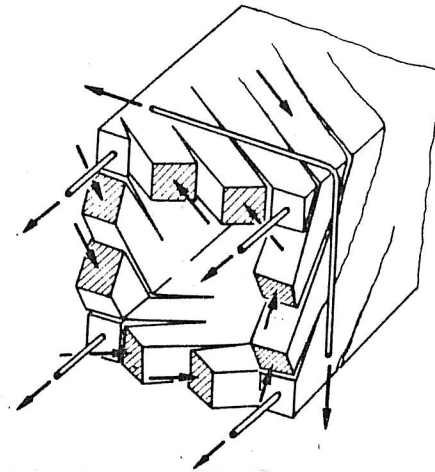
Den simplest tænkelige statisk tilladelige spændingstilstand i betonen i de skråtstillede betonlameller er et eenakset tryk under vinklen θ med bjælkeaksen i hele bjælkens længde. Denne spændingstilstand samt den rene forskydningspændingstilstand i normalsnittet er vist i figurerne 2.6 og 2.4.



Figur 2.3 Spændingsfordelingen i et hjørne af bjælkens tværsnit. Fra [4].

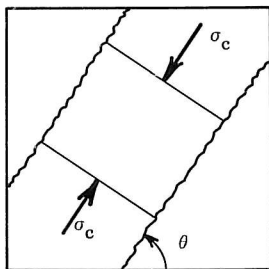


Figur 2.4 Spændingsfordelingen i bjælken. Fra [4].

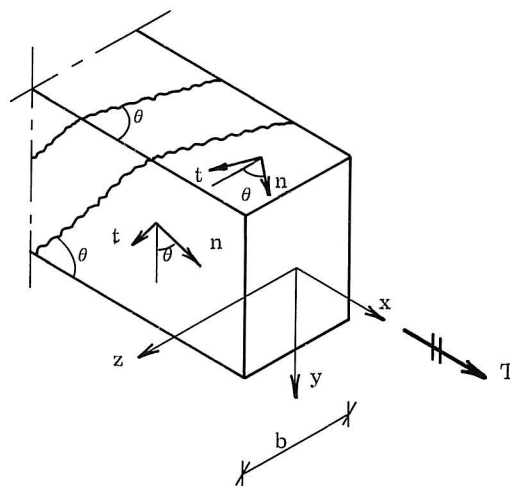


Figur 2.5 Stringerkræfter i betonlameller og armering. Fra [1].

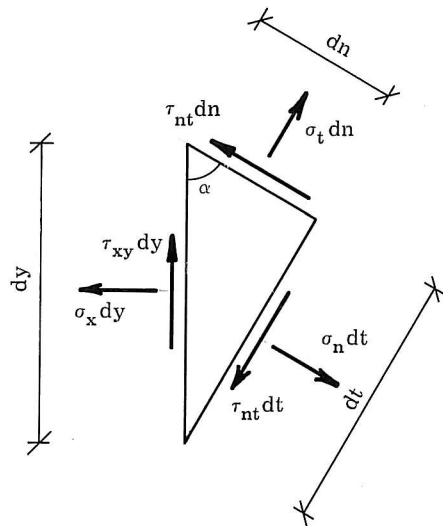
Til brug ved beskrivelse af spændingstilstanden indlægges på bjælkens sideflader et lokalt ortogonalt n, t -koordinatsystem med samme omløbsretning som x, y -koordinatsystemet. Se figur 2.7.



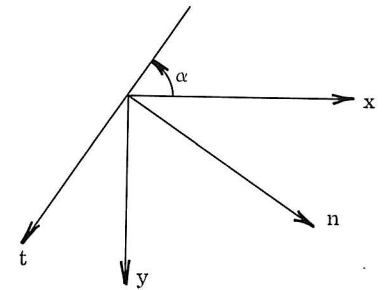
Figur 2.6 Spændingsfordeling i skiveelement



Figur 2.7 Bjælkeelement med akseretninger.



Figur 2.8 Skivelement med tykkelsen 1.



Figur 2.9 Koordinatsystemer.

I figur 2.8 er vist et infinitesimalt trekantformet skivelement med tykkelsen 1. Med de anvendte koordinatbetegnelser er skivelementet udtaget således, at dets sideflade er parallel med bjælkens lodrette sideflade. Beregningerne vil blive de samme, hvis skivelementet udtages af bjælkens vandrette sideflader. n, t -koordinatsystemet antages først at være drejet en vilkårlig vinkel $(90 - \alpha)$ i forhold til x -aksen.

Projektion på x -aksen af de på skivelementet i figur 2.8 virkende kræfter giver

$$\sigma_x \cdot dy = \sigma_t \cdot dn \cdot \cos \alpha + \sigma_n \cdot dt \cdot \sin \alpha - \tau_{nt} \cdot dn \cdot \sin \alpha - \tau_{nt} \cdot dt \cdot \cos \alpha$$

$$\text{idet } dn = dy \cdot \cos \alpha \text{ og } dt = dy \cdot \sin \alpha \text{ fås} \quad (2.1)$$

$$\sigma_x \cdot dy = \sigma_t \cdot dy \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_n \cdot dy \cdot \sin^2 \alpha - 2 \cdot \tau_{nt} \cdot dy \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\sigma_x = \sigma_t \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_n \cdot \sin^2 \alpha - \tau_{nt} \cdot \sin 2\alpha \quad (2.2)$$

ved en tilsvarende beregning fås

$$\sigma_y = \sigma_t \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_n \cdot \cos^2 \alpha + \tau_{nt} \cdot \sin 2\alpha \quad (2.3)$$

Ved projektion på y -aksen af kræfterne på skivelementet i figur 2.8 fås

$$\tau_{xy} \cdot dy = -\sigma_t \cdot dn \cdot \sin \alpha + \sigma_n \cdot dt \cdot \cos \alpha - \tau_{nt} \cdot dn \cdot \cos \alpha + \tau_{nt} \cdot dt \cdot \sin \alpha$$

ved indførelse af (2.1) og division med dy fås

$$\tau_{xy} = -(\sigma_t - \sigma_n) \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \tau_{nt} \cdot \cos 2\alpha \quad (2.4)$$

Antages nu, at $\alpha = \theta$, vil det sige, at skiveelementet er indlagt i de skrå betonlameller, hvori der hersker en enakset spændingstilstand, således at t-aksen er parallel med revnerne. Man har da

$$\sigma_n = \sigma_1 = 0, \tau_{nt} = 0 \text{ og } \sigma_t = \sigma_2 = -\sigma_c \quad (2.5)$$

idet n,t-aksesystemet da er et hovedaksesystem. σ_c er den numeriske værdi af betontrykspændingen.

Indsættes (2.5) i (2.2), (2.3) og (2.4) fås

$$\sigma_x = -\sigma_c \cdot \cos^2 \theta \quad (2.6)$$

$$\sigma_y = -\sigma_c \cdot \sin^2 \theta \quad (2.7)$$

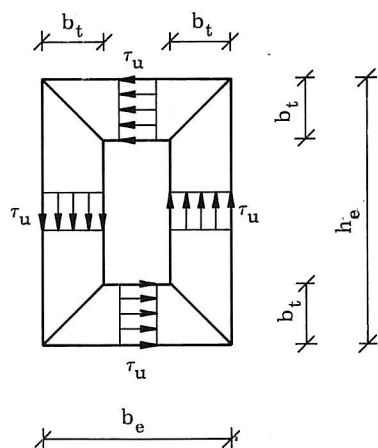
$$\tau_{xy} = \sigma_c \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\sigma_c \cdot \sin 2\theta \quad (2.8)$$

Ved den plasticitetsteoretiske nedreværdiløsning betragtes forskydningspændingen $\tau_{xy} = \tau_u$ i normalsnittet jævnt fordelt over skivetykkelsen b_t i det betragtede effektive tyndfligede tværsnit. Se figurerne 2.4 og 2.10.

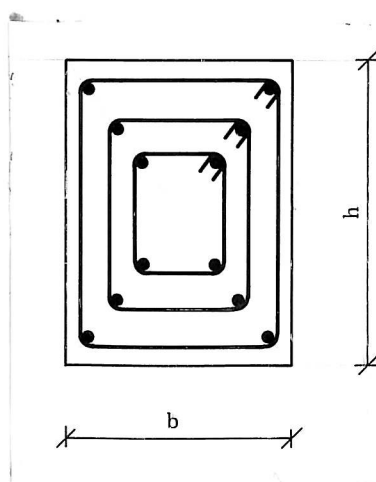
Den følgende løsning vil ikke være fuldstændig konsistent, idet overgangsbetingelsen mellem områderne med tykkelsen b_t ikke er tilfredstillet eksakt, med de sædvanlige udformninger af armeringen som for eksempel vist i figur 2.4.

En armeringsudformning, der bedre ville tilfredsstille den nedenfor opstillede løsning, er vist i figur 2.11.

Ligeledes er spændingsfordelingen i kontaktfladen mellem beton og armering endnu umulig at beregne eksakt, hvorfor en sikring af, at alle de til løsningen valgte spændingsfordelinger er statisk sikre, ikke er mulig. Bl. a. på grund af ovennævnte forhold er det ved dimensionering af vridningspåvirkede betonkonstruktioner nødvendigt at indføre den tidligere omtalte effektivitetsfaktor ν^*



Figur 2.10 Effektivt tværsnit.
Fra [4].



Figur 2.11 Bjælketværsnit. Fra [4].

Med den i figur 2.10 viste forskydningspændingsfordeling fås følgende udtryk for vridningsbæreevnen:

$$\begin{aligned} T_u = \tau_u \{ & (h_e - 2b_t) \cdot b_t \left(\frac{1}{2}b_e - \frac{1}{2}b_t \right) \cdot 2 \\ & + (b_e - 2b_t) \cdot b_t \left(\frac{1}{2}h_e - \frac{1}{2}b_t \right) \cdot 2 \\ & + \frac{1}{2} \cdot b_t^2 \cdot \left(\frac{1}{2}b_e - \frac{1}{3}b_t \right) \cdot 4 + \frac{1}{2}b_t^2 \left(\frac{1}{2}h_e - \frac{1}{3}b_t \right) \cdot 4 \} \end{aligned} \quad (2.10)$$

betegnelserne vælges således, at $b_e \leq h_e$.

Indføres

$$k = \frac{h_e}{b_e} \quad \text{og} \quad \gamma = \frac{b_t}{b_e} \quad (2.11)$$

i (2.10) kan dette udtryk sammentrækkes til

$$T_u = 2\gamma \cdot \tau_u \cdot b_e^3 \left(\frac{4}{3}\gamma^2 - (1+k)\gamma + k \right) \quad (2.12)$$

I det følgende vil der blive skelnet mellem normalarmeret tværsnit og overarmeret tværsnit.

En bjælke siges at være normalarmeret, når der er flydning i både længdearmering og bøjler.

Ved en overarmeret bjælke forstås en bjælke, hvor der ikke er flydning i armeringen. Der kan forekomme tre former for overarmering.

Hvis hverken bøjler eller længdearmering flyder, er bjælkerne som helhed overarmeret (OA).

Flyder længdearmeringen, men ikke bøjlerne, er bjælken overarmeret med hensyn til bøjlearmeringen (OAT). Flyder bøjlerne men ikke længdearmeringen, er bjælken overarmeret med hensyn til længdearmeringen (OAL).

2.2.1 NORMALARMERET BJÆLKE

Lægges et snit vinkelret på x-aksen, se figur 2.4, fås ved projektion på x-aksen

$$\begin{aligned} A_{sl} \cdot f_{yd,l} = 2 \left(\frac{1}{2}(b_e + b_e - 2b_t) \cdot b_t + \right. \\ \left. \frac{1}{2}(h_e + h_e - 2b_t) \cdot b_t \right) \sigma_c \cdot \cos^2 \theta \end{aligned}$$

idet (2.6) er indsat. A_{sl} er den samlede symmetriske anbragte længdearmering.

$$A_{sl} \cdot f_{yd,l} = 2((b_e - 2b_t) + h_e) \cdot b_t \cdot \sigma_c \cdot \cos^2 \theta \quad (2.13)$$

Ved division med $b_e^2 \cdot \sigma_c$ fås

$$\begin{aligned} \frac{A_{sl} \cdot f_{yd,l}}{b_e^2 \cdot \sigma_c} &= 2 \left(1 + \frac{h_e}{b_e} - 2 \frac{b_t}{b_e} \right) \cdot \frac{b_t}{b_e} \cdot \cos^2 \theta \\ &= 2(1 + k - 2\gamma) \cdot \gamma \cdot \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (2.14)$$

multipliseres tæller og nævner i venstresiden i (2.14) med k fås

$$\frac{k \cdot A_{sl} \cdot f_{yd,l}}{k \cdot b_e^2 \cdot \sigma_c} = k \cdot \frac{A_{sl} \cdot f_{yd,l}}{b_e \cdot h_e \cdot \sigma_c} = 2(1 + k - 2\gamma) \cdot \gamma \cdot \cos^2 \theta \quad (2.15)$$

Som nævnt tidligere er det nødvendigt at indføre en effektivitetsfaktor ν^* på betonspændingen. Tænkes betonen fuldt udnyttet, det vil sige at $\sigma_c = \nu^* \cdot f_{cd}$ og indføres

$$\Phi_l = \frac{A_{sl} \cdot f_{yd,l}}{b_e \cdot h_e \cdot f_{cd}} = \frac{A_{sl} \cdot f_{yd,l}}{k \cdot b_e^2 \cdot f_{cd}}$$

fås af (2.15)

$$k \cdot \Phi_l = 2(1 + k - 2\gamma) \cdot \nu^* \cdot \gamma \cdot \cos^2 \theta \quad (2.16)$$

Lægges et snit vinkelret på y-aksen eller z-aksen, se figur 2.4, fås ved projektion på normalen til dette snit

$$A_{st} \cdot f_{yd,t} = b_t \cdot a_t \cdot \sigma_c \cdot \sin^2 \theta \quad (2.17)$$

A_{st} er den enkelte bøjlestangs tværsnitsareal, a_t er bøjleafstanden.

Ved division med $\sigma_c \cdot b_e \cdot a_t$ og multiplikation med 2 samt indførelse af $\sigma_c = \nu^* \cdot f_{cd}$ fås

$$\frac{2 \cdot A_{st} \cdot f_{yd,t}}{b_e \cdot a_t \cdot f_{cd}} = \frac{b_t}{b_e} \cdot \nu^* \cdot \sin^2 \theta \cdot 2$$

$$\Phi_t = 2\nu^* \cdot \gamma \sin^2 \theta = 2\nu^* \cdot \gamma (1 - \cos^2 \theta) \quad (2.18)$$

idet

$$\Phi_t = \frac{2 \cdot A_{st} \cdot f_{yd,t}}{b_e \cdot a_t \cdot f_{cd}}$$

Φ_l og Φ_t benævnes henholdsvis mekanisk længdearmæringsgrad og mekanisk bøjlearmeringsgrad.

Af (2.18) fås

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{\Phi_t}{2\nu^* \gamma} \quad (2.19)$$

Indsættes (2.19) i (2.16) fås

$$k \cdot \Phi_l = 2(1 + k - 2\gamma) \left(1 - \frac{\Phi_t}{2\nu^* \gamma}\right) \cdot \gamma \cdot \nu^* \quad (2.20)$$

Løses (2.20) med hensyn til $\gamma = \frac{b_t}{b_e}$ fås

$$\gamma = \frac{1}{4\nu^*} ((1+k) \cdot \nu^* + \Phi_t - \sqrt{((1+k)\nu^* - \Phi_t)^2 - 4\nu^* \cdot \Phi_1 \cdot k}) \quad (2.21)$$

Med kendt forhold mellem effektiv højde og bredde,

$$k = \frac{h_e}{b_e}$$

samt kendte mekaniske armeringsgrader kan γ beregnes af (2.21), hvorefter bredden b_t af væggen i det effektive betontværsnit kan beregnes af

$$b_t = \gamma \cdot b_e \quad (2.22)$$

Divideres (2.16) op i (2.18) fås følgende udtryk til bestemmelse af θ .

$$\tan^2 \theta = \frac{1}{k} (1+k-2\gamma) \frac{\Phi_t}{\Phi_1} \quad (2.23)$$

Vridningsbæreevnen T_u kan herefter bestemmes ved at indføre

$$(2.8) \tau_u = \frac{1}{2} \sigma_c \cdot \sin 2\theta = \frac{1}{2} \cdot \nu^* \cdot f_{cd} \cdot \sin 2\theta \quad (2.12)$$

$$T_u = \nu^* \cdot f_{cd} \cdot \gamma \cdot b_e^3 \left(\frac{4}{3} \gamma^2 - (1+k)\gamma + k \right) \cdot \sin 2\theta \quad (2.24)$$

Fremgangsmåden ved bestemmelsen af vridningsbæreevnen T_u for et givet tværsnit bliver da følgende: Først bestemmes γ af (2.21), dernæst bestemmes θ af (2.23) og tilsidst bestemmes T_u af (2.24).

Hvis

$$\gamma = \frac{b_t}{b_e}$$

beregnet af (2.21), er større end $\frac{1}{2}$, er tværsnittet overarmeret og en af nedenstående fremgangsmåder skal anvendes ved bestemmelsen af T_u .

Når bjælken er overarmeret vil det sige, at betonen i brudtilstanden bliver udnyttet fuldt ud, hvilket betyder at

$$\gamma = \frac{b_t}{b_e} = \frac{1}{2}$$

Indsættes $\gamma = \frac{1}{2}$ i (2.24) fås

$$T_u = \frac{1}{4} \nu^* \cdot \left(k - \frac{1}{3}\right) \cdot b_e^3 \cdot \sin 2\theta \cdot f_{cd} \quad (2.25)$$

Betingelsen for at en bjælke er normalarmeret fås ved at indsætte

$$\gamma = \frac{b_t}{b_e} \leq \frac{1}{2}$$

i (2.21), det vil sige

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4\nu\star} ((1+k) \cdot \nu\star + \Phi_t - \sqrt{((1+k) \cdot \nu\star - \Phi_t)^2 - 4\nu\star \cdot \Phi_1 \cdot k})$$

$$\Phi_t + \nu\star(k-1) \leq \sqrt{((1+k) \cdot \nu\star - \Phi_t)^2 - 4\nu\star \cdot \Phi_1 \cdot k}$$

Opløftes til 2.potens på begge sider af lighedstegnet og sammentrækkes fås følgende betingelser for, at et tværsnit er normalarmeret,

$$\Phi_1 + \Phi_t \leq \nu\star \quad (2.26)$$

2.2.2 OVERARMERET BJÆLKE MED HENSYN TIL LÆNGDEARMERING (OAL)

For OAL gælder (2.18). Indsættes $\gamma = \frac{1}{2}$ i (2.18) fås

$$\Phi_t = \nu\star(1 - \cos^2 \theta) \quad (2.27)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{\nu\star - \Phi_t}{\nu\star} \quad (2.28)$$

Ved indsættelse af den heraf fundne værdi for θ i (2.25) findes vridningsbæreevnen T_u .

Ønskes et udtryk for T_u , der ikke indeholder θ , kan følgende omskrivning af (2.25) foretages

$$T_u = \frac{1}{4} \nu\star(k - \frac{1}{3}) b_e^3 \cdot \sin 2\theta \cdot f_{cd} = \frac{1}{4} \nu\star(k - \frac{1}{3}) b_e^3 \cdot 2 \cdot \sin \theta \cos \theta \cdot f_{cd}$$

$$T_u = \frac{1}{2} \cdot (k - \frac{1}{3}) \cdot b_e^3 \sqrt{\Phi_t(\nu\star - \Phi_t)} \cdot f_{cd} \quad (2.29)$$

2.2.3 OVERARMERET BJÆLKE MED HENSYN TIL BØJLER (OAT)

For OAT er (2.25) ligeledes gældende. Når længdearmeringen flyder gælder (2.16) der, idet $\gamma = \frac{1}{2}$ indsættes, bliver til

$$k \cdot \Phi_1 = 2k \cdot \nu\star \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{\Phi_1}{\nu\star} \quad (2.30)$$

Ved indsættelse af den heraf fundne værdi for θ i (2.25) findes vridningsbæreevnen T_u .

Elimineres θ i (2.25) ved hjælp af (2.30) fås

$$T_u = \frac{1}{2} (k - \frac{1}{3}) b_e^3 \sqrt{\Phi_1(\nu\star - \Phi_1)} \cdot f_{cd} \quad (2.31)$$

altså samme udtryk som (2.29), blot er Φ_t erstattet med Φ_1

2.2.4 OVERARMERET BJÆLKE MED HENSYN TIL LÆNGDEARMERING OG BØJLER (OA)

θ udgør i dette tilfælde en fri parameter og kan ikke som ovenfor bestemmes af (2.28) eller af (2.30). θ kan i dette tilfælde bestemmes ved en maksimering af (2.25) med hensyn til θ , det vil sige, at $\sin 2\theta = 1$

$$\theta = 45^\circ \quad (2.32)$$

Bæreevnen bliver da bestemt af

$$T_u = \frac{1}{4} \nu^* \left(k - \frac{1}{3}\right) \cdot b_e^3 \cdot f_{cd} \quad (2.33)$$

Det foran anvendte ν^* kan passende sættes til

$$\nu^* = 0,7 \cdot \nu$$

hvor ν er effektivitetsfaktoren knyttet til forskydningspåvirkningen. ν bestemmes af

$$\nu = 0,7 - \frac{f_{ck}}{200}$$

se DS 411 3.udgave (6.2.2.1 f).

2.2.5 VRIDNINGSPÅVIRKEDE BETONKONSTRUKTIONERS BEHANDLING I DS 411, 3. UDGAVE MARTS 1984

6.2.3 Vridning

Ved beregning af konstruktioner, påvirket til vridning, regnes med et effektivt tværsnit i form af et tyndfliget, lukket tværsnit. For massive tværsnit med konveks periferi sættes det effektive tværsnits vægtykkelse lig med $\frac{1}{4}$ af diameteren af den største cirkel, der kan indskrives i tværsnittet. For tilsvarende ikke-massive tværsnit beregnes vægtykkelsen på samme måde, men må dog højst sættes lig med den virkelige vægtykkelse.

Ovenstående bestemmelse vedrørende vægtykkelsen er blandt andet medtaget for at undgå, at bjælken overarmeres.

Ved tværsnit med indadgående hjørner foretages en opdeling i konvekse deltværsnit, som behandles hver for sig. Bæreevnen sættes lig med summen af deltværsnittenes bæreevne. Ved bestemmelse af armeringen kan det vridende moment fordeles på de enkelte deltværsnit i forhold til deres bæreevne, når betonspændingerne er fuldt udnyttede.

Som udtryk for forskydningspåvirkningen i det effektive tværsnits vægge bestemmes den formelle forskydningsspænding

$$\tau = \frac{T}{2Ab} \quad (6.2.3 a) \quad (2.34)$$

hvor

T er det vridende moment

A er det areal, der omsluttet af det tyndfligede tværsnits midtlinie

b er det tyndfligede tværsnits vægtykkelse.

Løses (2.34) med hensyn til T og indsættes (2.8), hvor der for σ_c er benyt-

tæt $\sigma_c = 0,7 \cdot \nu \cdot f_{cd}$ fås

$$T = 1,4 \cdot \nu \cdot A \cdot b \cdot f_{cd} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \quad (2.35)$$

Ved det ovenfor nævnte tværsnit med indadgående hjørner kan det totale vridningsmoment T , der påvirker det samlede tværsnit bestående af n konvekse deltværsnit, fordeles på de n -deltværsnit efter følgende formel

$$\Delta T_n = \frac{\Delta T_{n,c}}{\sum \Delta T_{n,c}} \quad (2.36)$$

hvor

$$\Delta T_{n,c} = 1,4\nu \cdot A_n \cdot b_n \cdot f_{cd} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \quad (2.37)$$

idet A_n og b_n er henholdsvis areal og godstykkelse knyttet til det n -te deltværsnit.

ν er her effektivitetsfaktoren knyttet til forskydningspåvirkningen. ν bestemmes af (6.2.2.1 f) i DS 411.

Det skrå betontryks vinkel θ med konstruktionens længdeakse skal vælges således, at

$$0,5 \leq \cot\theta \leq 2,0 \quad (6.2.3 \text{ b}) \quad (2.38)$$

Den skrå betontrykspænding σ_c skal opfylde betingelsen

$$\sigma_c \leq 0,7 \nu f_{cd} \quad (6.2.3 \text{ c}) \quad (2.39)$$

hvor faktoren ν bestemmes af formel (6.2.2.1 f) eller tabel 6.2.2.1.

Væggene svarende til det effektive tværsnit armeres for ren forskydning. I hjørnerne skal der altid placeres længdearmeringsstænger. Tværarmeringen må kun regnes nyttig, når den indbyrdes afstand mellem stængerne er mindre end $0,2 u \cot\theta$, dog højst $0,2 u$, hvor u er omkredsen af arealet A .

De i vejledningen til DS 411 angivne formler for den skrå betontrykspænding

$$\sigma_c = \left(\cot\theta + \frac{1}{\cot\theta} \right) \cdot \tau$$

den samlede længdearmering i et tværsnit

$$A_{sl} = \frac{\tau \cdot b_t \cdot u}{f_{yd}} \cdot \cot\theta$$

hvor u er omkredsen af arealet A , samt bøjleafstanden

$$a_t = \frac{A_{st} \cdot f_{yd}}{\tau \cdot b_t} \cdot \cot\theta$$

kan findes ved anvendelse af det foranstående.

Af (2.8) fås

$$\sigma_c = \frac{2\tau_{xy}}{\sin 2\theta} = 2\tau \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{2\sin \theta \cos \theta} = \tau \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \quad (2.40)$$

$$\sigma_c = \tau(\operatorname{tg} \theta + \cot \theta) = \tau \left(\frac{1}{\cot \theta} + \cot \theta \right) \quad (2.41)$$

Af (2.13) fås

$$A_{sl} \cdot f_{yd,l} = u \cdot b_t \cdot \sigma_c \cdot \cos^2 \theta \quad (2.42)$$

idet

$$2((b_e - 2b_t) + h_e) = u \quad (2.43)$$

Indsættes (2.40) i (2.42) fås

$$A_{sl} = \frac{1}{f_{yd,l}} \cdot u \cdot b_t \cdot \tau \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

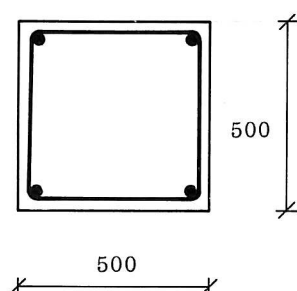
$$A_{sl} = \frac{\tau \cdot b_t \cdot u}{f_{yd,l}} \cdot \cot \theta \quad (2.44)$$

Indsættes (2.40) i (2.17) fås

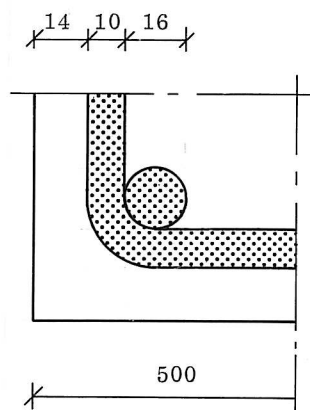
$$A_{st} \cdot f_{yd,t} = b_t \cdot a_t \cdot \frac{\tau}{\sin \theta \cos \theta} \cdot \sin^2 \theta$$

$$a_t = \frac{A_{st} \cdot f_{yd,t}}{\tau \cdot b_t} \cdot \cot \theta \quad (2.45)$$

EKSEMPEL 2.1



Figur 2.12 bjælketværsnit.



Figur 2.13 Armeringens placering.

Vridningsbæreevnen for en bjælke med det viste kvadratiske tværsnit ønskes bestemt.

Bjælken er fremstillet af beton med den karakteristiske brudstyrke $f_{ck} = 25 \text{ N/mm}^2$. Længdearmeringen består af 4 stk. kamstål med diameteren $d_{sl} = 16 \text{ mm}$ og

$f_{yk,l} = 500 \text{ N/mm}^2$. Bøjlearmeringen består af kamstål med diameteren $d_{st} = 10 \text{ mm}$, bøjleafstanden $a_t = 110 \text{ mm}$ og $f_{yk,t} = 420 \text{ N/mm}^2$. Sikkerhedsklasse og kontrolklasse er normal.

Med ovenstående oplysninger fås følgende regningsmæssige værdier, idet

$$\gamma_c = 1,8 \cdot 1 \cdot 1 = 1,8 \quad \text{og} \quad \gamma_s = 1,4 \cdot 1 \cdot 1 = 1,4$$

$$\nu = 0,7 - \frac{f_{ck}}{200} = 0,7 - \frac{25}{200} = 0,58$$

$$\nu^* = 0,7 \cdot \nu = 0,7 \cdot 0,58 = 0,40$$

beton:

$$f_{cd} = \frac{25}{1,8} = 13,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu^* \cdot f_{cd} = 0,4 \cdot 13,9 = 5,6 \text{ N/mm}^2$$

armering:

$$f_{yd,l} = \frac{500}{1,4} = 357 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{yd,t} = \frac{420}{1,4} = 300 \text{ N/mm}^2$$

Ifølge DS 411 kan revnevinklen vælges i intervallet $0,5 \leq \cot\theta \leq 2,0$. Vridningsbæreevnen beregnes for $\cot\theta = 0,5$, $\cot\theta = 1$ og $\cot\theta = 2,0$ i henhold til beregningsanvisningerne i DS 411.

Af figur 2.12 og 2.13 fås

$$b_e = h_e = 500 - 2 \cdot 14 = 472 \text{ mm}$$

$$b_t = \frac{1}{6} \cdot 472 \cong 79 \text{ mm}$$

$$u = 4(472 - 79) = 1572 \text{ mm}$$

$$A = (472 - 79)^2 = 154,4 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$A_{sl} = 804 \text{ mm}^2$$

$$A_{st} = 79 \text{ mm}^2$$

a. $\cot\theta = 0,5 \quad \theta = 63,43^\circ$

Af (2.39), (2.41), (2.44) og (2.45) fås

$$\tau_u = \min. \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{0,5 + 2} \cdot 5,6 = 2,24 \text{ N/mm}^2 \\ \frac{804 \cdot 357}{79 \cdot 1572} \cdot 2 = 4,62 \text{ N/mm}^2 \\ \frac{79 \cdot 300}{110 \cdot 79} \cdot \frac{1}{2} = 1,36 \text{ N/mm}^2 \end{array} \right.$$

Da den mindste af de ovenfor beregnede værdier for τ_u er bestemmende for T_u fås af (2.34)

$$T_u = \tau_u \cdot 2 \cdot A \cdot b_t = 1,36 \cdot 2 \cdot 154,4 \cdot 10^3 \cdot 79 = 33,2 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$\text{b. } \cot\theta = 1,0 \quad \theta = 45^\circ$$

Som ovenfor beregnes den bestemmende τ_u værdi af

$$\tau_u = \min. \begin{cases} \frac{1}{1+1} \cdot 5,6 = 2,80 \text{ N/mm}^2 \\ \frac{804 \cdot 357}{79 \cdot 1572} \cdot 1 = 2,31 \text{ N/mm}^2 \\ \frac{79 \cdot 300}{110 \cdot 79} \cdot 1 = 2,72 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$T_u = 2,31 \cdot 2 \cdot 154,4 \cdot 10^3 \cdot 79 = 56,4 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$\text{c. } \cot\theta = 2,0 \quad \theta = 26,57^\circ$$

$$\tau_u = \min. \begin{cases} \frac{1}{2+0,5} \cdot 5,6 = 2,24 \text{ N/mm}^2 \\ \frac{804 \cdot 357}{79 \cdot 1572} \cdot \frac{1}{2} = 1,16 \text{ N/mm}^2 \\ \frac{79 \cdot 300}{110 \cdot 79} \cdot 2 = 5,44 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$T_u = 1,16 \cdot 2 \cdot 154,4 \cdot 10^3 \cdot 79 = 28,3 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Da ovenstående resultater er fundet ved hjælp af nedreværdisætningen, kan den største værdi af de beregnede T_u værdier benyttes. Det vil sige $T_u = 56,4 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$.

En endnu større bæreevne kan findes ved at sætte τ_u beregnet af henholdsvis (2.44) og (2.45) lig hinanden og beregne revnevinklen θ af denne ligning.

$$\frac{A_{sl} \cdot f_{yd,l}}{b_t \cdot u} \cdot \frac{1}{\cot\theta} = \frac{A_{st} \cdot f_{yd,t}}{a_t \cdot b_t} \cdot \cot\theta$$

$$\cot^2 \theta = \frac{A_{sl} \cdot f_{yd,l} \cdot a_t}{A_{st} \cdot f_{yd,t} \cdot u} = \frac{804 \cdot 357 \cdot 110}{79 \cdot 300 \cdot 1572} = 0,85$$

$$\cot\theta = 0,92, \quad \theta = 47,37^\circ$$

for denne værdi af θ findes

$$\tau_u = \min. \begin{cases} \frac{1}{0,92+1,09} \cdot 5,6 = 2,79 \text{ N/mm}^2 \\ \frac{804 \cdot 357}{79 \cdot 1572} \cdot 1,09 = 2,52 \text{ N/mm}^2 \\ \frac{79 \cdot 300}{110 \cdot 79} \cdot 0,92 = 2,51 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$T_u = 2,51 \cdot 2 \cdot 154,4 \cdot 10^3 \cdot 79 = 61,2 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Anvendes den i afsnit 2.2.1 – 2.2.4 beskrevne fremgangsmåde fås følgende beregninger

$$\nu^* = 0,40 \quad k = \frac{h_e}{b_e} = \frac{472}{472} = 1$$

$$\Phi_t = \frac{2 \cdot 79 \cdot 300}{472 \cdot 110 \cdot 13,9} = 6,57 \cdot 10^{-2}$$

$$\Phi_1 = \frac{804 \cdot 357}{472 \cdot 472 \cdot 13,9} = 9,27 \cdot 10^{-2}$$

af (2.21) fås

$$\gamma = \frac{1}{4 \cdot 0,4} ((1 + 1)0,4 + 6,57 \cdot 10^{-2} - \sqrt{((1 + 1)0,4 - 6,57 \cdot 10^{-2})^2 - 4 \cdot 0,4 \cdot 9,27 \cdot 10^{-2} \cdot 1})$$

$$\gamma = 0,15 < 0,5$$

Bjælken er altså normalarmeret.

$$b_t = 0,15 \cdot 472 = 70,8 \text{ mm}$$

af (2.23) fås

$$\tan^2 \theta = \frac{1}{1} (1 + 1 - 2 \cdot 0,15) \frac{6,57 \cdot 10^{-2}}{9,27 \cdot 10^{-2}}$$

$$\tan^2 \theta = 1,2 \quad \theta = 47,67 \quad \cot \theta = 0,911$$

$$T_u = 0,4 \cdot 13,9 \cdot 0,15 \cdot 472^3 \left(\frac{4}{3} \cdot 0,15^2 - (1 + 1)0,15 + 1 \right) \sin 95,34$$

$$T_u = 63,7 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$$

altså omtrent samme resultat som ovenfor, fundet ved anvendelsen af DS 411.

3. KOMBINERET PÅVIRKNING BESTÅENDE AF NORMAL- OG FORSKYDNINGSKRAFT SAMT BØJNINGS- OG VRIDNINGSMOMENT.

Der er efterhånden verden over foretaget en del forsøg med det formål at kunne opstille en beregningsmodel for ovennævnte lastkombination. Endnu er det ikke lykkedes at opstille en teori, der tilfredsstillende kan belyse de meget komplicerede spændingsforhold, der optræder, når bjælken udsættes for ovennævnte kombinerede påvirkning.

Indtil en tilfredsstillende teori er opstillet, kan en af nedenstående metoder anvendes. Udførte forsøg synes at bekræfte, at disse metoder giver bæreevner, der er på den sikre side.

I [5] angives, at følgende betingelse skal være opfyldt

$$\frac{M}{M_p} + \left(\frac{T}{T_p} \right)^2 \leq 1 \quad (3.1)$$

for en bjælke påvirket af et bøjende moment M og et vridende moment T .

Hvis bjælken også påvirkes af en forskydende kraft V udvides (3.1) til

$$\frac{M}{M_p} + \left(\frac{T}{T_p}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_p}\right)^2 \leq 1 \quad (3.2)$$

hvor M_p , T_p og V_p angiver flydeværdierne for de enkelte snitkræfter svarende til at tværsnittet kun er påvirket af denne snitkraft.

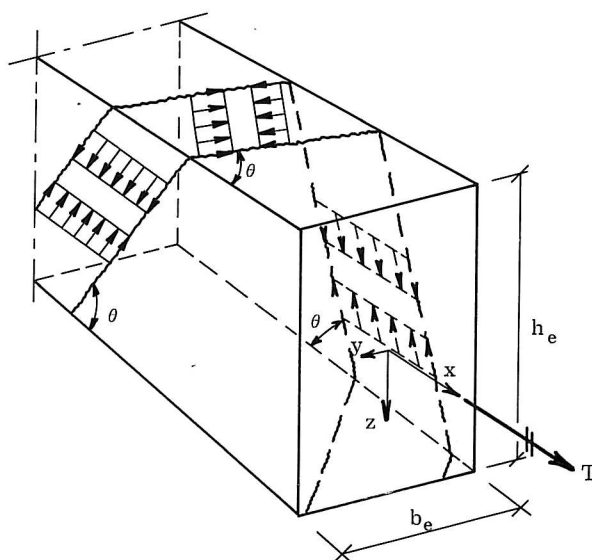
I (3.1) og (3.2) er forudsat, at det er trækzonen i bjælkets tværsnittet, der er bestemmende for bæreevnen. Dette bør tilstræbes for at sikre, at et eventuelt brud ikke bliver et uvarslet pludseligt brud med trykbrud i betonen.

Ønsker man et »bedre« kendskab til betonspændingernes størrelse i den statisk tilladelige og statisk sikre beregningsmodel, der benyttes ved anvendelsen af nedreværdisætningen, kan den nedenfor beskrevne beregningsmetode anvendes.

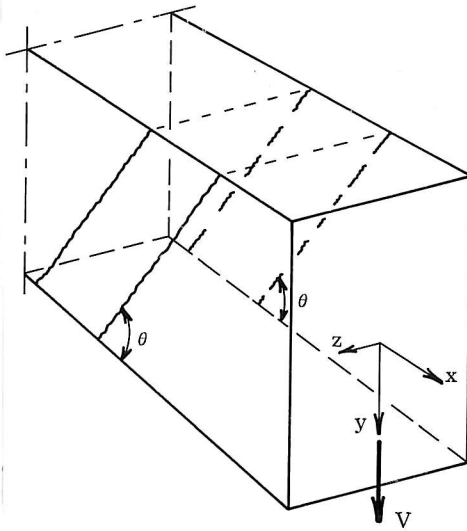
For hver af påvirkningerne normalkraft plus bøjningsmoment ($N + M$), forskydningskraft (V) og vridningsmoment (T) vælges en statisk tilladelig og statisk sikker spændingsfordeling. Det sidstnævnte opnås som nævnt tidligere ved indførelse af de ved forsøg bestemte værdier for effektivitetsfaktorerne ν og ν^* .

Den statisk tilladelige spændingsfordeling kan f.eks. findes ved for T at beregne det tilhørende τ af Bredt's formel og for $N + M$ og V at anvende henholdsvis Naviers og Grashof's formel på det transformerede tværsnit eller ved anvendelse af konstante spændingsfordelinger over tværsnitsdelene, altså en slags plasticitetsteoretisk spændingsfordeling.

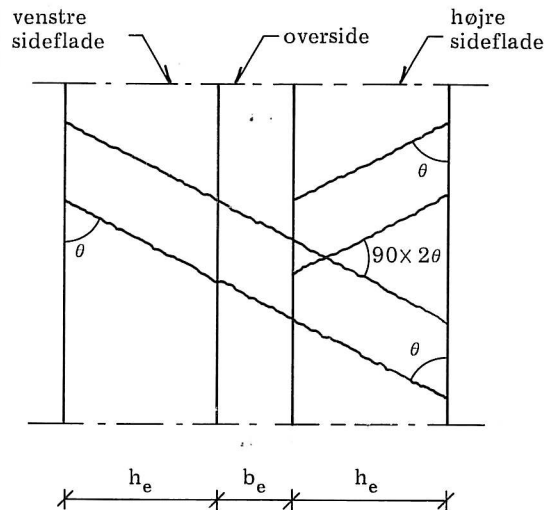
Regnes forskydningskraften optaget i skrå betonlammeller som beskrevet i afsnit 2 for optagelsen af vridningsmomentet, samt at lammellerne for de to påvirkninger begge danner vinklen θ med en plan gennem bjælkens bund, vil det betyde at retningerne for den valgte enaksede trykspændingstilstand i betonlammellerne i den ene bjælkeside er sammenfaldende, medens de i modsatte bjælkeside danner vinklen $90 - 2\theta$ med hinanden. Se figurerne 3.1, 3.2 og 3.3.



Figur 3.1 Revnedannelse ved vridningspåvirkning.



Figur 3.2 Revnedannelse ved forskydningspåvirkning.



Figur 3.3 Revnebillede i udfoldet bjælke for vridnings- og forskydningspåvirkning.

Den nødvendige bøjlearmering beregnes for henholdsvis vridningspåvirkningen og forskydningspåvirkningen for eksempel som angivet i afsnit 2 og i [5], svarende til angivelserne i DS 411, 3. udgave. Den samlede bøjlemængde fås ved addition.

Den samlede længdearmring beregnes ved addition af længdearmringen beregnet for $(N + M)$ -påvirkningen og længdearmringen beregnet for vridningspåvirkningen. $(N + M)$ -påvirkningen kan reducere længdearmringen svarende til en kraft N fordelt på den samlede længdearmring og en kraft M/h_{int} i armeringen i oversiden.

Med den antagne spændingstilstand vil den største trykpåvirkning i betonen forekomme i den øverste del af venstre sideflade i bjælken vist i figur 3.1.

Der vil her være en trykspænding parallel med revneretningen der er lig summen af trykspændingerne hidværende fra henholdsvis vridningspåvirkningen $\sigma_{c,T}$, forskydningspåvirkningen $\sigma_{c,V}$ og normalkraft- plus momentpåvirkningen $\sigma_{c,M+N}$.

Forsøg har som tidligere omtalt vist, at der ved vridningspåvirkning alene og forskydningspåvirkning alene må indføres effektivitetsfaktorer, henholdsvis ν^* og ν , for at få teori og forsøg til at stemme overens.

Det må derfor forventes, at der ved den kombinerede påvirkning bestående af N , M , V og T ligeledes skal benyttes en effektivitetsfaktor ν^{**} , således at følgende krav må stilles for at forhindre betontrykbrud i den skrå betonlamel.

$$\sigma_{c,T} + \sigma_{c,V} + \sigma_{c,M+N} \leq \nu^{**} \cdot f_{cd} \quad (3.3)$$

Eller måske snarere

$$\frac{\sigma_{c,T}}{\nu_1 \cdot f_{cd}} + \frac{\sigma_{c,V}}{\nu_2 \cdot f_{cd}} + \frac{\sigma_{c,M+N}}{\nu_3 f_{cd}} \leq 1 \quad (3.4)$$

Der er endnu ikke udført forsøg, der kan dokumentere en sådan fremgangsmåde. Det skal derfor anbefales, at der indtil videre for kombinerede påvirkninger anvendes de beregningsregler for hindring af betonbrud, der er angivet i DS 411, 3. udg. 1984.

DS 411 anbefaler at reducere de tilladte grænser for betonspændinger fra både forskydning og bøjning med faktoren $(1 - k_1)$, hvor k_1 er forholdet mellem de af vridningen fremkaldte skrå betontrykspændinger og den tilsvarende øvre grænse for disse spændinger.

Det betyder, at betontrykspændingerne i bjælke kroppen hidrørende fra forskydning og vridning skal kombineres, og betontrykspændingerne i bjælkens overside hidrørende fra bøjning og vridning skal kombineres.

Dette stemmer overens med de stringer-teoretiske betragtninger, der gøres ved beregning af forskydnings- og momentpåvirkede bjælker, hvor man heller ikke kombinerer betontrykspændingerne hidrørende fra henholdsvis forskydnings- og momentpåvirkningen.

Som angivet ovenfor adderes spændingerne skalært. Dette er på den sikre side, da betontrykspændingerne hidrørende fra henholdsvis vridnings- og bøjningspåvirkningen ikke virker i samme retning.

For et rektangulært tværsnit kan den skrå betontrykspænding fra vridningspåvirkningen i henhold til (2.41) beregnes af

$$\sigma_{cT} = \tau \left(\cot\theta + \frac{1}{\cot\theta} \right) = \frac{T(\cot\theta + \tg\theta)}{2(b_e - \frac{1}{6}b_e)(h_e - \frac{1}{6}b_e) \cdot \frac{1}{6}b_e}$$

idet (2.34) med $b = \frac{1}{6}b_e$ er benyttet. Indføres $k = \frac{h_e}{b_e}$ fås

$$\sigma_{cT} = \frac{3,6(\cot\theta + \tg\theta)}{b_e^3(k - 0,167)} \cdot T \quad (3.5)$$

dvs.

$$k_1 = \frac{\sigma_{cT}}{\nu^* \cdot f_{cd}} = \frac{3,6(\cot\theta + \tg\theta)}{\nu^* \cdot b_e^3(k - 0,167)} \cdot \frac{T}{f_{cd}} \quad (3.6)$$

hvor

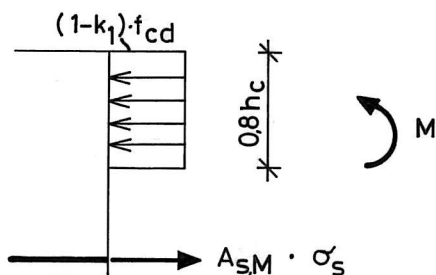
$$\nu^* = 0,7(0,7 - \frac{f_{ck}}{200}) = 0,49 - 0,35 \cdot 10^{-2} \cdot f_{ck} \quad (3.7)$$

De betonspændinger, der står til rådighed for optagelse af bøjningsmoment og forskydningskraft, bliver henholdsvis $(1 - k_1) \cdot f_{cd}$ og

$$(1 - k_1)(0,7 - \frac{f_{ck}}{200}) \cdot f_{cd}$$

Fra forskydningskraftpåvirkningen fås den skrå betontrykspænding

$$\sigma_{cV} = \tau_V(\cot\theta + \tg\theta) = \frac{V(\cot\theta + \tg\theta)}{b \cdot h_{int}} \quad (3.8)$$



Armeringsbidraget $A_{s,M}$ hidrørende fra bøjningspåvirkningen findes ved hjælp af beregningsmodellen vist i fig. 3.4 til

$$A_{s,M} = \frac{M}{(h_{eff} - 0,4h_c) \cdot \sigma_s} \quad (3.9)$$

Fig. 3.4 Beregningsmodel

LITTERATURHENVISNINGER

- [1] Fritz Leonhardt: Vorlesungen über Massivbau, Erster Teil. Springer-Verlag.
- [2] Troels Brøndum-Nielsen: Betonkonstruktioner II. Afdelingen for bærende konstruktioner. DTH 1972.
- [3] M.P. Nielsen , L. Pilegaard Hansen, A. Rathkjen: Mekanik 2.2. Lyngby 1977.
- [4] Bent Feddersen, M.P. Nielsen: Effektivitetsfaktoren ved vridning af jernbetonbjælker. Afdelingen for bærende konstruktioner. Serie R, no. 174, 1983.
- [5] M.P. Nielsen: Limit analysis and concrete plasticity. 1984 by Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
- [6] DS 411 3. udgave, marts 1984. Dansk Ingeniørforenings norm for betonkonstruktioner.